

# ТЕОРЕМА ПИФАГОРА

Материал из Википедии — свободной энциклопедии

Теорема Пифагора — одна из основополагающих теорем евклидовой геометрии, устанавливающая соотношение между сторонами прямоугольного треугольника: сумма квадратов длин катетов равна квадрату длины гипотенузы.

Соотношение в том или ином виде предположительно было известно различным древним цивилизациям задолго до нашей эры; первое геометрическое доказательство приписывается Пифагору. Утверждение появляется как Предложение 47 в «Началах» Евклида.

Также может быть выражена как геометрический факт о том, что площадь квадрата, построенного на гипотенузе, равна сумме площадей квадратов, построенных на катетах. Верно и обратное утверждение: треугольник, сумма квадратов длин двух сторон которого равна квадрату длины третьей стороны, является прямоугольным.

Существует ряд обобщений данной теоремы — для произвольных треугольников, для фигур в пространствах высших размерностей. В неевклидовых геометриях теорема не выполняется.

## История

По мнению историка математики Морица Кантора, в Древнем Египте во времена царя Аменемхета I (около XXIII век до н. э.) было известно о прямоугольном треугольнике со сторонами 3, 4, 5 — его использовали гарпедонапты — «натягиватели верёвок» (1). В древневавилонском тексте, относимом ко временам Хаммурапи (XX век до н. э.), приведено приближённое вычисление гипотенузы (2). По мнению Ван-дер-Вардена, очень вероятно, что соотношение в общем виде было известно в Вавилоне уже около XVIII века до н. э.

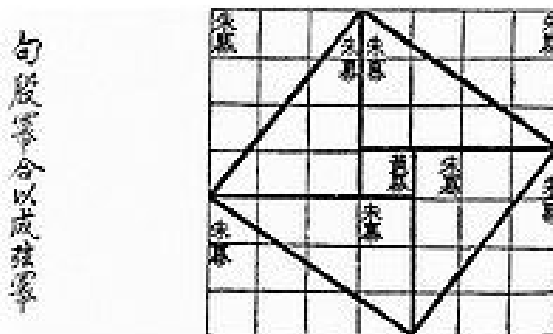


Рисунок 1 - Рисунок из книги Чжоу би суань цзин (500—200 лет до нашей эры)

В древнекитайской книге «Чжоу би суань цзин», относимой к периоду V—III веков до н. э., приводится треугольник со сторонами 3, 4 и 5, притом изображение можно трактовать как графическое обоснование соотношения теоремы (3). В китайском сборнике задач «Математика в девяти книгах» (X—II веков до н. э.) применению теоремы посвящена отдельная книга.

Общепринято, что доказательство соотношения дано древнегреческим философом Пифагором (570—490 до н. э.). Имеется свидетельство Прокла (412—485 н. э.), что Пифагор использовал алгебраические методы, чтобы находить пифагоровы тройки (4), но при этом в течение пяти веков после смерти Пифагора прямых упоминаний о доказательстве его авторства не находится. Однако когда такие авторы, как Плутарх и Цицерон, пишут о теореме Пифагора, из содержания следует, будто авторство Пифагора общеизвестно и несомненно (5). Существует предание, сообщённое Диогеном Лаэртским, согласно которому Пифагор якобы отпраздновал открытие своей теоремы гигантским пиром, зажав на радостях сотню быков.

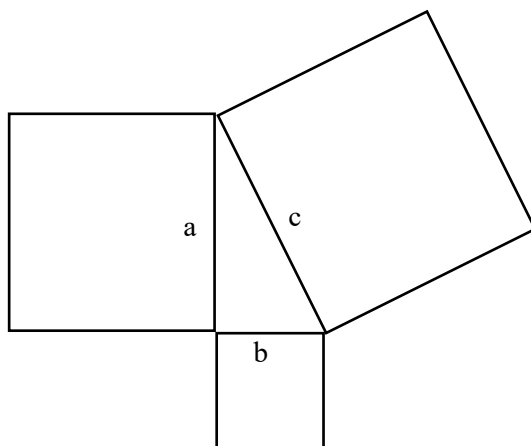
Приблизительно в 400 году до н. э., согласно Проклу, Платон дал метод нахождения пифагоровых троек, сочетающий алгебру и геометрию. Около в 300 года до н. э. в «Началах» Евклида появилось старейшее аксиоматическое доказательство теоремы Пифагора.

## Формулировки

Основная формулировка содержит алгебраические действия — в прямоугольном треугольнике, длины катетов которого равны  $a$  и  $b$ , а длина гипотенузы —  $c$ , выполнено соотношение:

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad (1)$$

Возможна и эквивалентная геометрическая формулировка, прибегающая к понятию площади фигуры: в прямоугольном треугольнике площадь квадрата, построенного на гипотенузе, равна сумме площадей квадратов, построенных на катетах. В таком виде теорема сформулирована в Началах Евклида.



*Рисунок 2 - Сумма площадей квадратов, опирающихся на катеты  $a$  и  $b$ , равна площади квадрата, построенного на гипотенузе  $c$*

Обратная теорема Пифагора — утверждение о прямоугольности всякого треугольника, длины сторон которого связаны соотношением  $a^2 + b^2 = c^2$ . Как следствие, для всякой тройки положительных чисел  $a$ ,  $b$  и  $c$ , такой, что  $a^2 + b^2 = c^2$ , существует прямоугольный треугольник с катетами  $a$  и  $b$  и гипотенузой  $c$ .

## Доказательства

В научной литературе зафиксировано не менее 400 доказательств теоремы Пифагора, что объясняется как фундаментальным значением для геометрии, так и элементарностью результата. Основные направления доказательств: алгебраическое использование соотношений элементов треугольника (таков, например, популярный метод подобия), метод площадей, существуют также различные экзотические доказательства (например, с помощью дифференциальных уравнений).

### Через подобные треугольники

Одним из наиболее популярных в учебной литературе доказательств алгебраической формулировки является доказательство с использованием техники подобия треугольников, при этом оно почти непосредственно выводится из аксиом и не задействует понятие площади фигуры. В нём для треугольника  $\triangle ABC$  с прямым углом при вершине  $C$  со сторонами  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , противолежащими вершинам  $A$ ,  $B$ ,  $C$  соответственно, проводится высота  $CH$ , при этом (согласно признаку подобия по равенству двух углов) возникают соотношения подобия:  $\triangle ABC \sim \triangle ACH$  и  $\triangle ABC \sim \triangle CBH$ , из чего непосредственно следуют соотношения:

$$\frac{a}{c} = \frac{|HB|}{a}; \frac{b}{c} = \frac{|AH|}{b} \quad (2)$$

При перемножении крайних членов пропорций выводятся равенства:

$$a^2 = c \cdot |HB|; b^2 = c \cdot |AH| \quad (3)$$

покомпонентное сложение которых даёт требуемый результат:

$$a^2 + b^2 = c \cdot (|HB| + |AH|) = c^2 \leftrightarrow a^2 + b^2 = c^2. \quad (4)$$

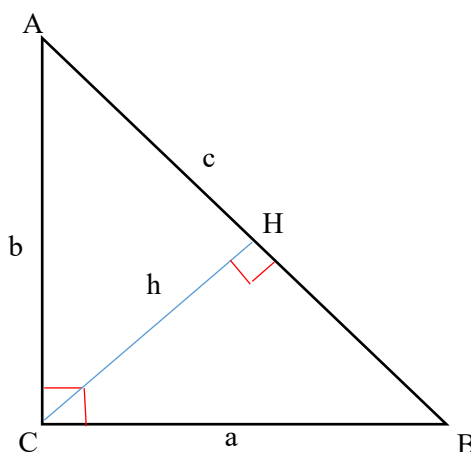


Рисунок 3 - Треугольник ABC

### Доказательства методом площадей

Большое число доказательств задействуют понятие площади. Несмотря на видимую простоту многих из них, такие доказательства используют свойства площадей фигур, доказательства которых сложнее доказательства самой теоремы Пифагора.

#### Доказательство через равнодополняемость

Доказательство через равнодополняемость использует четыре копии прямоугольного треугольника с катетами  $a$ ,  $b$  и гипотенузой  $c$ , расположенные таким образом, чтобы образовывать квадрат со стороной  $a + b$  и внутренний четырёхугольник со сторонами длиной  $c$ . Внутренний четырёхугольник в этой конфигурации является квадратом, так как сумма двух противоположных прямого острого углов —  $90^\circ$ , а развёрнутый угол —  $180^\circ$ . Площадь внешнего квадрата равна  $(a + b)^2$ , он состоит из внутреннего квадрата площадью  $c^2$  и четырёх прямоугольных треугольников, каждый площадью  $\frac{ab}{2}$ , в результате из соотношения  $(a + b)^2 = 4 \cdot \frac{ab}{2} + c^2$ , при алгебраическом преобразовании следует утверждение теоремы.

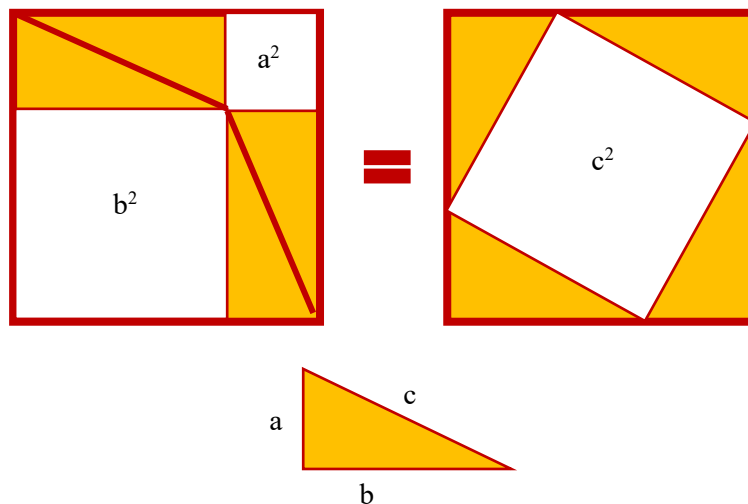


Рисунок 4- Схема доказательства через равнодополняемость

### Доказательство Евклида

Классическое доказательство Евклида направлено на установление равенства площадей между прямоугольниками, образованными из рассечения квадрата над гипотенузой высотой из прямого угла с квадратами над катетами.

Конструкция, используемая для доказательства следующая: для прямоугольного треугольника  $\triangle ABC$  с прямым углом  $C$ , квадратов над катетами  $ACED$  и  $BCFG$  и квадрата над гипотенузой  $ABIK$  строится высота  $CH$  и продолжающий её луч  $s$ , разбивающий квадрат над гипотенузой на два прямоугольника  $АНJK$  и  $ВНJI$ . Доказательство нацелено на установление равенства площадей прямоугольника  $АНJK$  с квадратом над катетом  $AC$ ; равенство площадей второго прямоугольника, составляющего квадрат над гипотенузой, и прямоугольника над другим катетом устанавливается аналогичным образом.

Равенство площадей прямоугольника  $АНJK$  и  $ACED$  устанавливается через конгруэнтность треугольников  $\triangle ACK$  и  $\triangle ABD$ , площадь каждого из которых равна половине площади прямоугольников  $АНJK$  и  $ACED$  соответственно в связи со следующим свойством: площадь треугольника равна половине площади прямоугольника, если у фигур есть общая сторона, а высота треугольника к общей стороне является другой стороной прямоугольника. Конгруэнтность треугольников следует из равенства двух сторон (стороны квадратов) и углу между ними (составленного из прямого угла и угла при  $A$ ).

Таким образом, доказательством устанавливается, что площадь квадрата над гипотенузой, составленного из прямоугольников  $АНJK$  и  $ВНJI$ , равна сумме площадей квадратов над катетами.

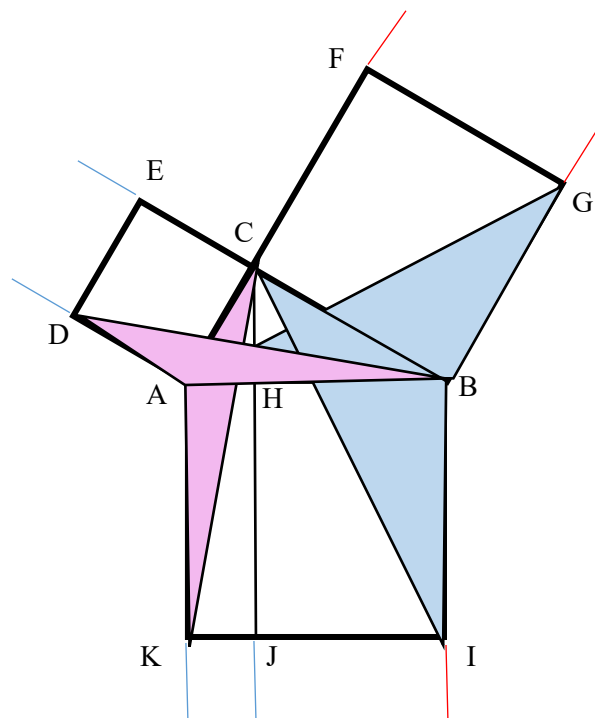


Рисунок 5 - Чертёж к доказательству Евклида

### Доказательство Леонардо да Винчи

К методу площадей относится также доказательство, найденное Леонардо да Винчи. Пусть дан прямоугольный треугольник  $\triangle ABC$  с прямым углом  $C$  и квадраты  $ACED$ ,  $BCFG$  и  $ABNJ$  (см. рисунок 6). В этом доказательстве на стороне  $HJ$  последнего во внешнюю сторону строится треугольник, конгруэнтный  $\triangle ABC$ , притом отражённый как относительно гипотенузы, так и относительно высоты к ней (то есть  $JI=BC$  и  $HI=AC$ ). Прямая  $CI$  разбивает квадрат, построенный на гипотенузе на две равные части, поскольку треугольники  $\triangle ABC$  и  $\triangle JHI$  равны по построению. Доказательство устанавливает конгруэнтность четырёхугольников  $CAJI$  и  $DABG$ , площадь каждого из которых, оказывается, с одной стороны, равной сумме половин площадей квадратов на катетах и площади исходного треугольника, с другой стороны — половине площади квадрата на гипотенузе плюс площадь исходного треугольника. Итого, половина суммы площадей квадратов над катетами равна половине площади квадрата над гипотенузой, что равносильно геометрической формулировке теоремы Пифагора.

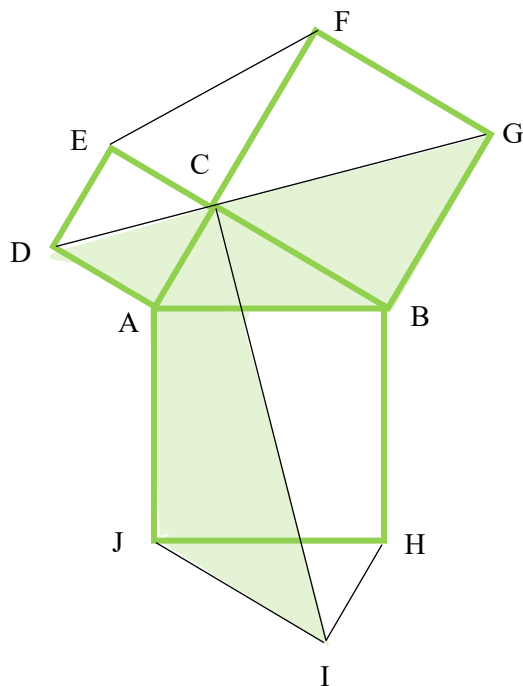


Рисунок 6 - Чертёж к доказательству Леонардо да Винчи



### Через площади подобных треугольников

Следующее доказательство основано на том, что площади подобных треугольников относятся как квадраты соответственных сторон.

Пусть  $ABC$  есть прямоугольный треугольник,  $AD$  — перпендикуляр, опущенный на гипотенузу из вершины прямого угла. Треугольники  $ABC$ ,  $DBA$  подобны, так как имеют по прямому углу и ещё общий угол  $B$ . Значит

$$\frac{\text{площадь } DBA}{\text{площадь } ABC} = \frac{AB^2}{BC^2} \quad (5)$$

Точно также получаем, что

$$\frac{\text{площадь } DAC}{\text{площадь } ABC} = \frac{AC^2}{BC^2} \quad (6)$$

Поскольку треугольники  $DBA$  и  $DAC$  вместе составляют  $\triangle ABC$ , сумма площадей  $\triangle DBA$  и  $\triangle DAC$  равна площади  $\triangle ABC$ . Отсюда

$$\frac{AB^2 + AC^2}{BC^2} = 1 \quad (7)$$

или

$$AB^2 + AC^2 = BC^2 \quad (8)$$

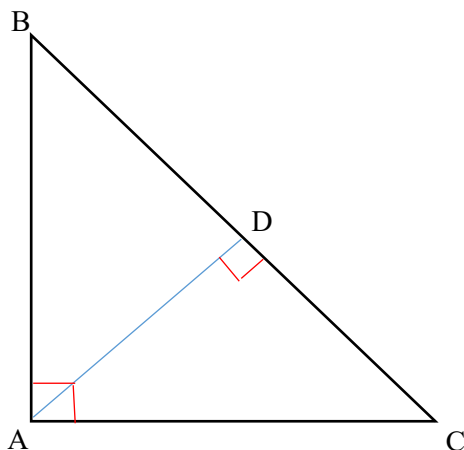


Рисунок 7 - Треугольник  $ABC$

### Доказательство методом бесконечно малых

Существует несколько доказательств, прибегающих к технике дифференциальных уравнений. В частности, Харди приписывается доказательство, использующее бесконечно малые приращения катетов  $a$  и  $b$  и гипотенузы  $c$ . Например, приращение катета  $da$  при постоянном катете  $b$  приводит к приращению гипотенузы  $dc$ , так что

$$\frac{da}{dc} = \frac{c}{a} \quad (9)$$

Методом разделения переменных из них выводится дифференциальное уравнение  $c \, dc = a \, da$ , интегрирование которого даёт  $c^2 = a^2 + \text{Const.}$  Применение начальных условий  $a=0, c=b$  определяет константу как  $b^2$ , что в результате даёт утверждение теоремы.

Квадратичная зависимость в окончательной формуле появляется благодаря линейной пропорциональности между сторонами треугольника и приращениями, тогда как сумма связана с независимыми вкладами от приращения разных катетов.

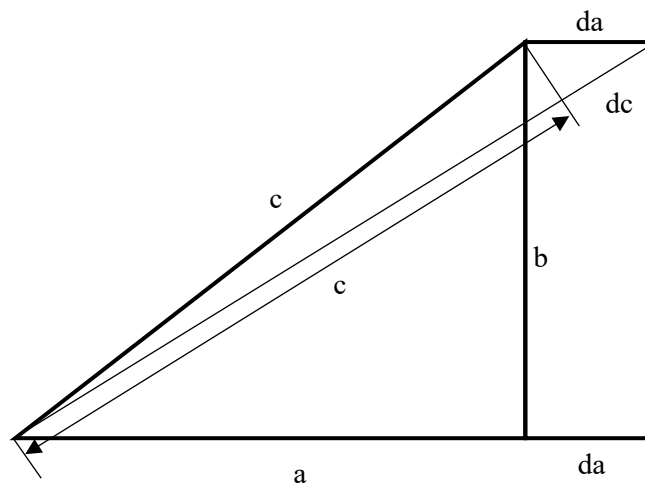


Рисунок 8 - Доказательство методом бесконечно малых

## Вариации и обобщения

### Подобные геометрические фигуры на трёх сторонах

Важное геометрическое обобщение теоремы Пифагора дал Евклид в «Началах», перейдя от площадей квадратов на сторонах к площадям произвольных подобных геометрических фигур: сумма площадей таких фигур, построенных на катетах, будет равна площади подобной им фигуры, построенной на гипотенузе.

Главная идея этого обобщения заключается в том, что площадь подобной геометрической фигуры пропорциональна квадрату любого своего линейного размера и в частности квадрату длины любой стороны. Следовательно, для подобных фигур с площадями  $A$ ,  $B$  и  $C$ , построенных на катетах с длинами  $a$  и  $b$  и гипотенузе с соответственно, имеет место соотношение:

$$\frac{A}{a^2} = \frac{B}{b^2} = \frac{C}{c^2} \rightarrow A + B = \frac{a^2}{c^2}C + \frac{b^2}{c^2}C \quad (10)$$

Так как по теореме Пифагора  $a^2 + b^2 = c^2$ , то выполнено  $A+B=C$ .

Кроме того, если возможно доказать без привлечения теоремы Пифагора, что для площадей трёх подобных геометрических фигур на сторонах прямоугольного треугольника выполнено соотношение  $A+B=C$ , то с использованием обратного хода доказательства обобщения Евклида можно вывести доказательство теоремы Пифагора. Например, если на гипотенузе построить конгруэнтный начальному прямоугольный треугольник площадью  $C$ , а на катетах — два подобных ему прямоугольных треугольника с площадями  $A$  и  $B$ , то оказывается, что треугольники на катетах образуются в результате деления начального треугольника его высотой, то есть сумма двух меньших площадей треугольников равна площади третьего, таким образом  $A+B=C$  и, применяя соотношение для подобных фигур, выводится теорема Пифагора.

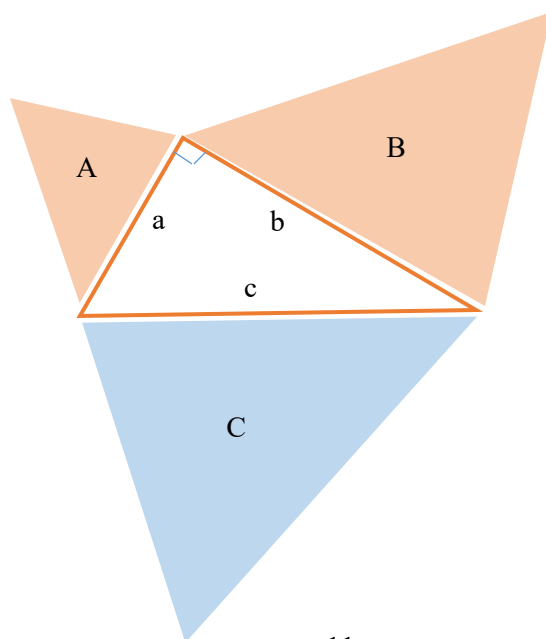
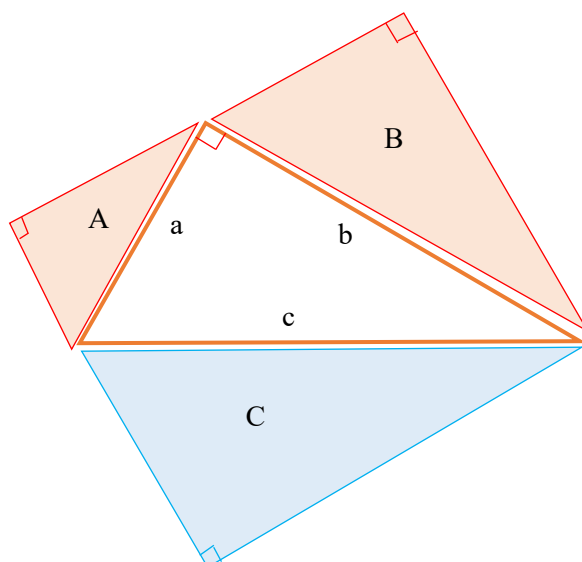


Рисунок 9 - Обобщение для подобных треугольников, площадь розовых фигур равны площади голубой



*Рисунок 10 - Теорема Пифагора с использованием подобных прямоугольных треугольников*

### Теорема косинусов

Теорема Пифагора — это частный случай более общей теоремы косинусов, которая связывает длины сторон в произвольном треугольнике:

$$a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \theta = c^2 \quad (11)$$

где  $\theta$  — угол между сторонами  $a$  и  $b$ . Если угол равен  $90^\circ$ , то  $\cos \theta = 0$ , и формула упрощается до обычной теоремы Пифагора.

### Произвольный треугольник

Существует обобщение теоремы Пифагора на произвольный треугольник, оперирующее исключительно соотношением длин сторон. Считается, что оно впервые было установлено сабийским астрономом Сабитом ибн Куррой. В нём для произвольного треугольника со сторонами  $a$ ,  $b$ ,  $c$  в него вписывается равнобедренный треугольник с основанием на стороне  $c$ , вершиной, совпадающей с вершиной исходного треугольника, противоположащей стороне  $c$  и углами при основании, равными углу  $\theta$ , противоположащему стороне  $c$ . В результате образуются два треугольника, подобных исходному: первый — со сторонами  $a$ , дальней от неё боковой стороной вписанного равнобедренного треугольника, и  $r$  — части стороны  $c$ ; второй — симметрично к нему от стороны  $b$  со стороной  $s$  — соответствующей частью стороны  $c$ . В результате оказывается выполнено соотношение:

$$a^2 + b^2 = c(r + s), \text{ вырождающееся в теорему Пифагора при } \theta = \frac{\pi}{2}.$$

Соотношение является следствием подобия образованных треугольников:

$$\frac{c}{a} = \frac{a}{r}, \frac{c}{b} = \frac{b}{s} \rightarrow cr + cs = a^2 + b^2 \quad (12)$$

### **Теорема Паппа о площадях**

Теорема Паппа о площадях, позволяющая для произвольного треугольника и произвольных параллелограммов на двух его сторонах построить параллелограмм на третьей стороне таким образом, чтобы его площадь была равна сумме площадей двух заданных параллелограммов, также может быть рассмотрена как обобщение теоремы Пифагора: в случае, когда исходный треугольник — прямоугольный, а на катетах в качестве параллелограммов заданы квадраты, квадрат, построенный на гипотенузе оказывается удовлетворяющим условиям теоремы Паппа о площадях.

## Многомерные обобщения

Обобщением теоремы Пифагора для трёхмерного евклидова пространства является теорема де Гуа: если тетраэдр имеет прямой угол, то квадрат площади грани, лежащей напротив прямого угла, равен сумме квадратов площадей других трёх граней. Этот вывод может быть обобщён и как «n-мерная теорема Пифагора» для евклидовых пространств высших размерностей — для граней ортогонального n-мерного симплекса с площадями  $S_1, \dots, S_n$  ортогональных граней и противоположащей им грани площадью  $S_0$  выполнено соотношение:

$$S_0^2 = \sum_{i=1}^n S_i^2 \quad (13)$$

Ещё одно многомерное обобщение возникает из задачи нахождения квадрата длины диагонали прямоугольного параллелепипеда: для её вычисления необходимо дважды применить теорему Пифагора, в результате она составит сумму квадратов длин трёх смежных сторон параллелепипеда. В общем случае, длина диагонали n-мерного прямоугольного параллелепипеда со смежными сторонами с длинами  $a_1, \dots, a_n$  составляет:

$$d^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 \quad (14)$$

как и в трёхмерном случае, результат является следствием последовательного применения теоремы Пифагора к прямоугольным треугольникам в перпендикулярных плоскостях.

Обобщением теоремы Пифагора для бесконечномерного пространства является равенство Парсеваля (6).



## Применение

### Расстояние в двумерных прямоугольных системах

Важнейшее применение теоремы Пифагора — определение расстояния между двумя точками в прямоугольной системе координат: расстояние  $s$  между точками с координатами  $(a, b)$  и  $(c, d)$  равно:

$$s = \sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2} \quad (15)$$

Для комплексных чисел теорема Пифагора даёт естественную формулу для нахождения модуля комплексного числа — для  $z=x+yi$  он равен длине радиус-вектора на комплексной плоскости к точке  $(x, y)$ :

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (16)$$

Расстояние между комплексными числами  $z_1=x_1+y_1i$  и  $z_2=x_2+y_2i$  также представляется в форме теоремы Пифагора:

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \quad (17)$$

## Теория чисел

Пифагорова тройка — набор из трёх натуральных чисел  $(x, y, z)$ , которые могут быть длинами сторон прямоугольного треугольника, то есть натуральные числа, удовлетворяющие диофантову уравнению  $x^2 + y^2 = z^2$ . Пифагоровы тройки играют важную роль в теории чисел, задача их эффективного нахождения породила широкий пласт работ начиная с древнейших времён вплоть до современности. Формулировка Великой теоремы Ферма аналогична задаче нахождения пифагоровых троек для степени более 2.

## Список литературы

1. Папирус 6619 Берлинского музея.
2. History topic: Pythagoras's theorem in Babylonian mathematics.
3. Heath, Thomas L. Translated by Johan Ludvig Heiberg with an introduction and commentary. *Euclid. The Elements (3 vols.)*. б.м. : Dover, 1956.
4. S., Heath. Edition of Dover Publications. *A History of Greek Mathematics (2 Vols.)*. Oxford : Clarendon Press, 1921.
5. Г., Шилов. *Математический анализ. Специальный курс*. М : Физматлит, 1961.
6. М., Титаренко. Наука, техническая и военная мысль, здравоохранение и образование. *Духовная культура Китая: энциклопедия в 5 томах*. М : Восточная литература РАН, 2009, стр. 939—941.

## Список иллюстраций

Рисунок 1 - Рисунок из книги Чжоу би суань цзин (500—200 лет до нашей эры) .....	3
Рисунок 2 - Сумма площадей квадратов, опирающихся на катеты $a$ и $b$ , равна площади квадрата, построенного на гипотенузе $c$ .....	4
Рисунок 3 - Треугольник ABC .....	5
Рисунок 4- Схема доказательства через равнодополняемость .....	6
Рисунок 5 - Чертёж к доказательству Евклида.....	7
Рисунок 6 - Чертёж к доказательству Леонардо да Винчи.....	8
Рисунок 7 - Треугольник ABC .....	9
Рисунок 8 - Доказательство методом бесконечно малых.....	10
Рисунок 9 - Обобщение для подобных треугольников, площадь розовых фигур равны площади голубой.....	11
Рисунок 10 - Теорема Пифагора с использованием подобных прямоугольных треугольников .....	12

## Оглавление

История .....	3
Формулировки .....	4
Доказательства .....	5
Через подобные треугольники .....	5
Доказательства методом площадей .....	6
Доказательство через равнодополняемость .....	6
Доказательство Евклида .....	7
Доказательство Леонардо да Винчи .....	8
Через площади подобных треугольников .....	9
Доказательство методом бесконечно малых .....	10
Вариации и обобщения .....	11
Подобные геометрические фигуры на трёх сторонах .....	11
Теорема косинусов .....	13
Произвольный треугольник .....	14
Теорема Паппа о площадях .....	15
Многомерные обобщения .....	16
Применение .....	17
Расстояние в двумерных прямоугольных системах .....	17
Теория чисел .....	18
Список литературы .....	19
Список иллюстраций .....	20